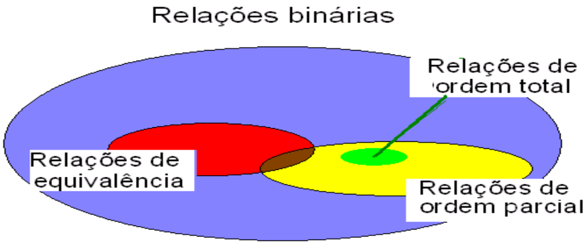
1.1 Relações Binárias



Definição 1.1.1:
Seja X um conjunto. Chama-se relação binária sobre X a todo o subconjunto de $X \times X$.
Uma relação n-ária ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$) sobre X é um subconjunto de X^n.

Exemplos:

1. *Seja* $X = \{1, 2, 3\}$.
$$R = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2)\}$$
2. *Seja* $X = \{1, 2, 3, 4\}$.
$$R = \{(x, y) \in X^2 : x + y \leq 5\}$$

Notação: *Sejam X é um conjunto e R é uma relação sobre X.*

Para designar que (x,y) ∈R escreve-se também xRy.

x está em relação com y (através da relação R)

Definição 1.1.2:
Sejam X e Y conjuntos. Uma relação de X em Y é um subconjunto de $X \times Y$. No caso particular de $X = Y$, temos uma relação binária sobre X.

Chamamos *domínio* de uma relação R de X em Y ao conjunto

$$\mathrm{dom} R = \{x \in X : \exists y \in Y \ (x, y) \in R\}$$

Chamamos *imagem* de uma relação binária R de X em Y ao conjunto

$$\mathrm{im}R = \{y \in Y : \exists x \in X \; (x,y) \in R\}.$$

Definimos relação inversa de R a relação de Y em X dada por

$$R^{-1} = \{(y,x) : (x,y) \in R\}$$

Exemplo: $X = \{1,2,3\}$, $Y = \{a,b,c,d\}$ $\qquad X \times Y$

$$\sim = \{(1,a),(1,c),(2,c),(2,d),(3,d)\}$$

- $(1,c) \in \sim \;\Leftrightarrow\; 1 \sim c$
- $\mathrm{dom} \sim = \{1,2,3\} \subseteq X, \;\; \mathrm{im} \sim = \{a,c,d\} \subseteq Y$
- $(\sim)^{-1} = \{(a,1),(c,1),(c,2),(d,2),(d,3)\} \subseteq Y \times X$
- $\mathrm{dom}(\sim)^{-1} = \{a,c,d\} \subseteq Y, \;\; \mathrm{im}(\sim)^{-1} = \{1,2,3\} \subseteq X$

Relação Composta:

Sejam X, Y, Z conjuntos. Sejam ainda,

R uma relação de X em Y e *S* é uma relação de Y em Z

Define-se a relação composta de R por S como a relação

$S \circ R$ de X em Z,

definida por

$$S \circ R = \{(x,z) : \; (\exists a \in Y)\,(x,a) \in R \text{ e } (a,z) \in S\}$$

Exercício: $X = \{1,2,3\}$, $Y = \{a,b,c,d\}$, $Z = \{7,8\}$

$\sim = \{(1,a),(1,c),(2,c),(2,d),(3,d)\}$ relação de X em Y

$S = \{(a,7),(c,8),(d,8)\}$ relação de Y em Z

$S \circ \sim =$ **?**

Representação de relações binárias:

Seja R uma relação binária sobre $X = \{x_1, ..., x_n\}$.

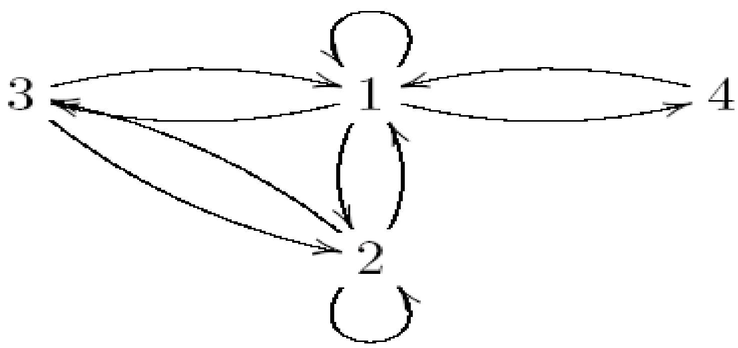
Através de um diagrama:
os elementos de X são representados por pontos e dois pontos do diagrama que representam x_i e x_j estão unidos por uma seta, com orientação de x_i para x_j, se $(x_i, x_j) \in R$.

Através de uma matriz de adjacências:
A matriz de adjacências de R é a matriz $A = [a_{ij}]_{n\times n} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\{0,1\})$ definida por:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad (x_i, x_j) \in R \\ 0 & \text{se} \quad (x_i, x_j) \notin R \end{cases}$$

Exemplo: *Seja* $X = \{1, 2, 3, 4\}$.

$$R = \{(x, y) \in X^2 : x + y \leq 5\}$$

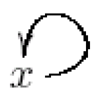


$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

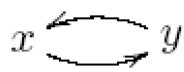
Definição 1.1.3: (Tipos de relações binárias)

Dizemos que uma relação binária R sobre X é:

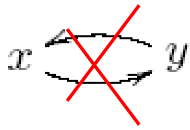
- *reflexiva se $\forall x \in X \quad xRx$.*



- *simétrica se $\forall x, y \in X \quad xRy \Rightarrow yRx$.*

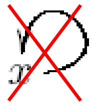


- *anti-simétrica* se $\forall x, y \in X \quad xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$.



- *transitiva* se $\forall x, y, z \in X \quad xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$.

- *irreflexiva* se $\forall x \in X \quad (x, x) \notin R$.



Definição 1.1.4: (Relação de equivalência)

Uma relação binária reflexiva, simétrica e transitiva diz-se uma relação de equivalência.

Exemplos:

Sejam X um conjunto.

"relação identidade"

$\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ é relação de equivalência

$\Omega = \{(x, y) : x, y \in X\}$ é relação de equivalência

"relação universal"

Exercício: Quais das seguintes relações binária são relações de equivalência em *X:*

1. Seja $X = \{1, 2, 3, 4\}$.
$R = \{(1,1), (1,2), (4,1), (2,2), (3,3), (1,4), (2,1), (4,4)\}$

2. Seja $X = \{1, 2, 3, 4\}$.
$S = \{(1,1), (1,2), (4,1), (2,2), (3,3), (1,4), (2,1), (4,4), (4,2), (2,4)\}$

3 Seja $X=\mathbb{R}$. Considere em X a relação R definida por,

$$xRy \Leftrightarrow x^2 = y^2, \qquad x, y \in \mathbb{R}$$

Definição 1.1.5: (Classes de equivalência)

Seja X um conjunto e R uma relação de equivalência sobre X.

Chama-se classe de equivalência (módulo R) de um elemento $a \in X$, *ao conjunto*

$$[a]_R = \{x \in X : xRa\}.$$

O conjunto das classes de equivalência $[a]_R$ com $a \in X$ é chamado de conjunto quociente de X por R,

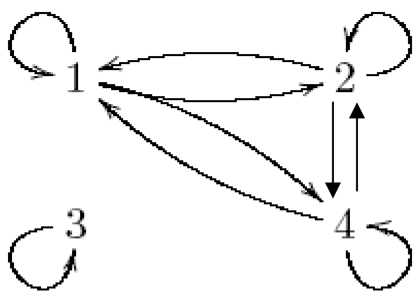
$$X/R = \{[a]_R : \ a \in X\}$$

Exemplo:

1 $X = \{1, 2, 3, 4\}$

$$R = \{(1,1), (1,2), (4,1), (2,2), (3,3), (1,4), (2,1), (4,4), (4,2), (2,4)\}$$

Relação equivalência sobre X



$$[1]_R = \{1, 2, 4\}$$
$$[2]_R = \{1, 2, 4\}$$
$$[3]_R = \{3\}$$
$$[4]_R = \{1, 2, 4\}$$

Classe do 4

Conjunto quociente de X por R

$$X/R = \{[1]_R, [2]_R, [3]_R, [4]_R\} = \{\{1, 2, 4\}, \{3\}\}$$

2. $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$R=$
$\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,2),(2,1),(1,5),(5,1),(2,5),(5,2)\}$

Relação equivalência sobre X

Tem-se:

$[1] = \{1, 2, 5\} = [2] = [5], \quad [3] = \{3\}, \quad [4] = \{4\}$

$$X/R = \{\{1, 2, 5\}, \{3\}, \{4\}\}$$

nº fixo

3. Em $\mathbb{Z}$ define-se uma relação de equivalência $\equiv_n$ por: para quaisquer $x, y \in \mathbb{Z}$,

$$x \equiv_n y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x - y = kn,$$

designada por relação de congruência módulo n.

Tem-se:

$$\begin{aligned}
\overline{0} &= \{..., -2n, -n, 0, n, 2n, ...\} \\
\overline{1} &= \{..., -2n+1, -n+1, 1, n+1, 2n+1, ...\} \\
&\cdots \\
\overline{n-1} &= \{..., -n-1, -1, n-1, 2n-1, 3n-1, ...\}
\end{aligned}$$

$$\mathbb{Z}/R = \{\overline{0}, \overline{1}, ..., \overline{n-1}\}.$$

Notação: Para dizer que $x \equiv_n y$ também podemos denotar por $x = y (\mathrm{mod}\ n)$.

Não esquecer

Proposição 1.1.6:

Sejam X um conjunto e R uma relação de equivalência sobre X. Para quaisquer $a,\ b \in X$, as seguintes afirmações são equivalentes:

(1) bRa;

(2) $b \in [a]_R$;

(3) $[b]_R = [a]_R$.

Teorema 1.1.7:

Sejam X um conjunto e R uma relação de equivalência sobre X.
Temos:

(1) *Para qualquer* $x \in X$, $[x]_R \neq \emptyset$;

(2) *Para quaisquer* $x,\ y \in X$, $[x]_R = [y]_R$ *ou* $[x]_R \cap [y]_R = \emptyset$;

(3) $X = \bigcup_{x \in X} [x]_R$;

X/R **é partição de *X***

Teorema 1.1.8:

1. *Se R é uma relação de equivalência sobre X, então X/R é uma partição de X.*
2. *Se $\mathcal{P} = \{X_i :\ i \in I\}$ é uma partição de X e R é a relação*

$$xRy \iff (\exists i \in I) \qquad x,\ y \in X_i,$$

(i) R *é relação de equivalência sobre* X

(ii) $\mathcal{P} = X/R$.

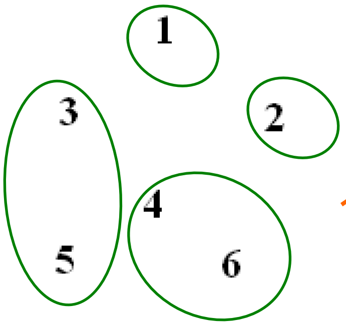
● **Questão:** Como obter uma relação de equivalência em *X*?

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

1. Obter uma partição de X

$$\mathcal{P} = \{\{2\}, \{1\}, \{3, 5\}, \{4, 6\}\}$$

2. Construir todos os pares ordenados com os elementos dos subconjuntos da partição



$$\begin{aligned} R = \{&(1,1), (2,2), (3,3), (4,4),\\ &(5,5), (6,6), (3,5), (5,3),\\ &(4,6), (6,4)\}\end{aligned}$$